FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICA

Teórico:

La forma general de una función cuadrática es la siguiente:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}}$$

Las letras a, b y c se llaman coeficientes de la función; la letra x representa la variable independiente y la expresión $f(x)$ representa el valor obtenido al reemplazar x por algún valor en el lado derecho de la igualdad, es decir, $f(x)$ es la imagen de x. La expresión $f(x)$ puede reemplazarse por la letra y que representa a la variable dependiente de la función. Así la expresión del recuadro anterior, también se puede escribir: $y = ax^2 + bx + c$

Algunos ejemplos:

a) $f(x) = x^2 + 5x - 2$

b) $y = -x^2$

c) $f(x) = \frac{x^2}{3} - 0{,}5x - 1$

d) $h(t) = -8t^2 + 60t$

e) $f(x) = 2(x-3)^2 + 3$

f) $y = 1 - 2t^2$

Coeficientes de la función de segundo grado:

Como ya se dijo, en una **función cuadrática** de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, las letras a, b y c se denominan coeficientes; el coeficiente c de una función cuadrática se llama constante.

Ejemplo:

Dada la función: $f(x) = 2x^2 + 3x - 10$,

$a = 2 \quad b = 3 \quad c = -10$

Valor numérico de una función de segundo grado:

Evaluar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, significa reemplazar el valor de x, por algún valor que pertenezca al dominio de la función.

Ejemplo:

Evaluar $f(x) = x^2 + 5x - 2$ en los valores dados:

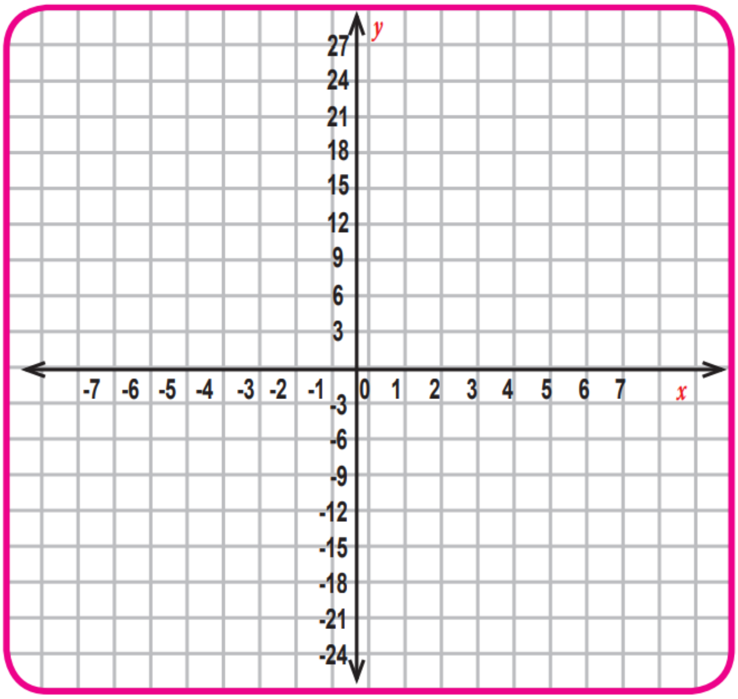
Función	Valor de x a evaluar	Función evaluada
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 0$	$f(0) = (0)^2 + 5(0) - 2 = -2$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = -1$	$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 2 = -6$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 1$	$f(1) = (1)^2 + 5(1) - 2 = 4$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = -2$	$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) - 2 = -8$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 2$	$f(2) = (2)^2 + 5(2) - 2 = 12$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = a$	$f(a) = (a)^2 + 5(a) - 2 = a^2 + 5a - 2$

Representación gráfica:

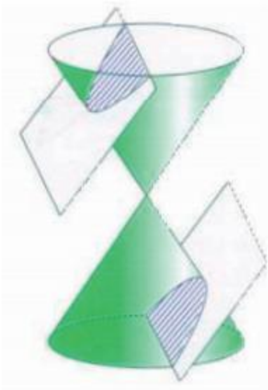
Ejemplo:

Complete la tabla y represente gráficamente los puntos:

x	$y = f(x) = x^2$	(x,y)
-5	25	(-5,25)
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



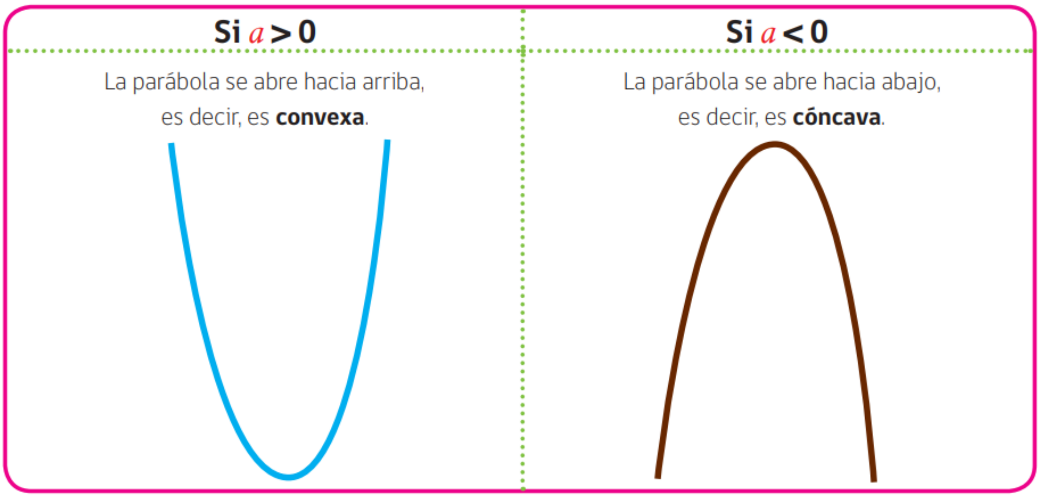
La forma representada se llama **PARÁBOLA** que corresponde al relieve que se puede observar en un cono una vez que este es cortado por un plano como se observa en esta figura:



Orientación de la parábola:

Como podemos observar en la figura anterior la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, lo que está indicado por el signo del coeficiente a que acompaña a x^2, es decir, dada la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

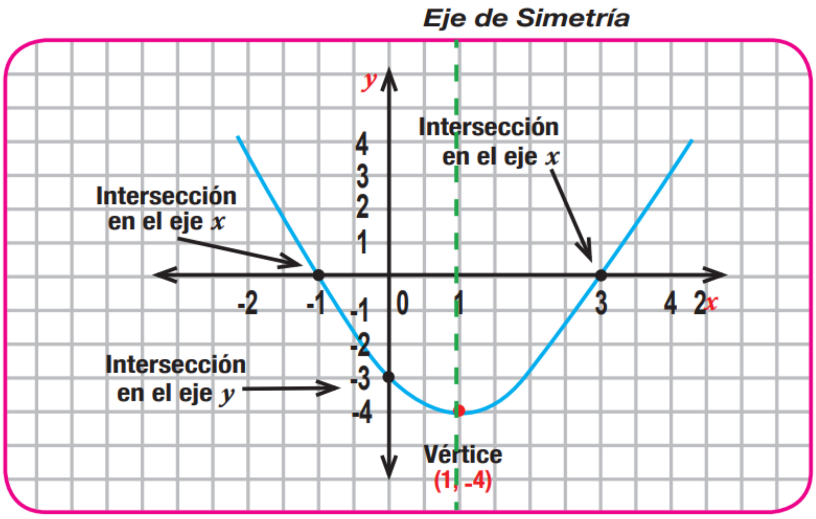


Otros elementos importantes de la parábola:

En el gráfico de una parábola, además de su concavidad, se pueden apreciar los siguientes elementos importantes:

- Eje de simetría
- Vértice
- Corte con el eje Y
- Ceros, raíces o valores de intersección en el eje X

Ejemplo:



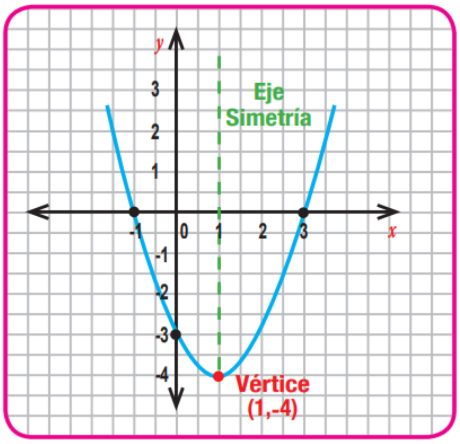
Eje de simetría:

En el tipo de funciones cuadráticas que estamos estudiando: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$; el eje de simetría es una recta vertical, paralela al eje y, que atraviesa la gráfica de manera que cada rama de ésta, separada por el eje, es el "reflejo" de la otra, asumiendo la idea de que éste simula un espejo. El eje de simetría intersecta a la parábola en el vértice y al eje X en el valor x que es la abscisa del vértice. La fórmula del valor x mencionado, conocida como **Ecuación del Eje de Simetría** es:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Ejemplo:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Como $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = -2}$, $\boldsymbol{c = -3}$ calculamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la valoración de la expresión algebraica:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2)}{2 \bullet 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Eje de simetría $\boxed{x = 1}$

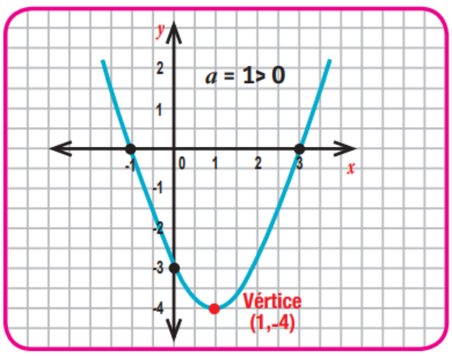
Vértice de la parábola:

Al esbozar la gráfica de la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in R$, observamos que dependiendo de la orientación de la parábola, esta presenta un punto en el plano cartesiano, que es mínimo si se abre hacia arriba (cóncava), o máximo si se abre hacia abajo (convexa), este punto se denomina **vértice de la parábola** y se puede determinar a través de la expresión:

$$\boxed{V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)}$$

Ejemplo:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Los coeficientes son: $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = -2}$, $\boldsymbol{c = -3}$ determinamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la expresión:

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y de la evaluación algebraica:

$\frac{-b}{2a} \rightarrow - \frac{(-2)}{2 \bullet 1} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$, por lo tanto $\boldsymbol{x = 1}$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 2 \bullet \mathbf{1} - 3 = -4$

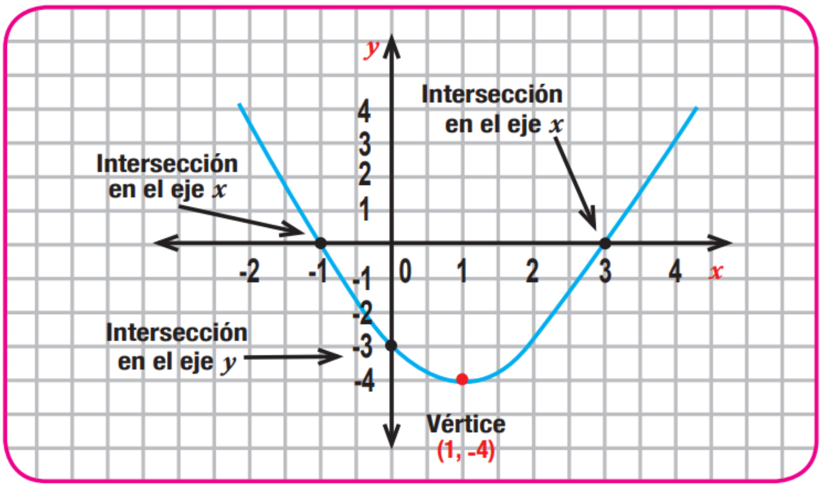
por lo tanto $\boldsymbol{y = -4}$

Vértice $\boxed{V(1, -4)}$

Intersección con los ejes:

1. **Corte con el eje Y:** Se llama así al valor donde la gráfica de la función intercepta al eje y. Para determinar este valor se reemplaza x por 0 en la ecuación de la función. Así, $y = f(0)$ es el valor en que la gráfica corta al eje y. Es evidente que dada la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c, c$ es el intercepto.
2. **Raíces:** Se llaman así a los valores donde la gráfica de la función intercepta al eje X. Para determinar la intersección con el eje x, se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática. Así, al hacer en la ecuación $y = 0$, y resolver $f(x) = 0$, se determinan las raíces de la función. La cantidad de raíces puede ser 2, 1 o 0, caso último en que la gráfica no intercepta al eje X.
   Para resolver $f(x) = 0$, utilizaremos la expresión conocida como la **fórmula de Bhaskara**:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:



Al igualar a cero la función cuadrática se obtiene la ecuación cuadrática: $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, que resolvemos usando la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a = 1; \quad b = -2; \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-3)}}{2 \bullet 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore$ Las intersecciones con el eje x son:

$(3, 0)$ y $(-1, 0)$

Práctico

Función Cuadrática

Ejercicio 1.

Resolver en R (Sugerencia: Factorizar para determinar el conjunto solución).

a. $(3x-1)^2=(6x-2)(3x+4)$

b. $(3x-1)^2+9x^2-1=0$

c. $(3x-1)^2-9x+3=0$

d. $(x+5)(3x+2)=x(x+5)$

e. $4(2x+1)^2=4x(2x+1)$

f. $2x(x+1)^2=(x+1)(2x+8)$

g. $(x+1)3x^2+24x+24=0$

Ejercicio 2.

Dada la función $f: f(x)=x^2+x-2$, completa las siguientes igualdades:

a. $f(2)=$.........

b. $f(0)=$.........

c. $f(1)=$.........

d. $f(-2)=$.........

e. $f(\ldots\ldots)=-2$

Ejercicio 3.

Grafica en un mismo sistema de coordenadas, indicando en casa de existir, ordenada en el origen y raices:

a. $f(x)=x^2$

b. $f(x)=x^2-1$

c. $f(x)=x^2-4$

d. $f(x)=x^2+b\ (b\in R)$

e. $f(x)=2x^2$

f. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

g. $f(x)=-2x^2$

h. $f(x)=x^2+2$

Ejercicio 4.

Determina en cada caso las raíces y las ordenadas en el origen de cada función:

a. $f(x)=x^2$

b. $f(x)=(x-2)(x+3)$

c. $f(x)=3(x-2)(x+3)$

d. $f(x)=(x-5)^2$

e. $f(x)=x^2-4$

f. $f(x)=x(x-2)$

g. $f(x)=x(3-2x)$

h. $f(x)=x^2-x$

Ejercicio 5.

Teorema de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0\ (con\ a \neq 0)$$

Demostración: $(a \neq 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow 2ax = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow 2ax + b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

$$4a(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Ejercicio 6.

Al poner a prueba un nuevo modelo de motocicleta se comprueba que para velocidades mayores a 10 Km/h y menores a 150 Km/h, el rendimiento de nafta r (en Km/litro) en función de la velocidad v (en Km/h), viene dado por: $r(v) = 0{,}36v - 0{,}002v^2$

a. Averigua el rendimiento de la moto para velocidades de 40Km/h, 80Km/h y 110Km/h
b. ¿A qué velocidad el rendimiento es máximo?
c. ¿Cuál es dicho máximo?

Ejercicio 7.

De una función polinómica de segundo grado, de dominio R, se sabe que:

- Su gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0;\ -8)$
- Una raíz es -4
- El eje de simetría de la gráfica pasa por el punto de coordenadas $(-3;\ 0)$

a. Realiza un bosquejo de la función.
b. Determina la otra raíz de la función.
c. ¿Cuál es el punto simétrico de $(0;\ -8)$ respecto al eje de simetría de la gráfica de la función?

Ejercicio 8.

Bhaskara, matemático indio del siglo XII, escribió un libro al que llamó *Lilavati*, nombre de su hija, a quien estaba dedicado. En él plantea cuestiones como la siguiente:

"bella muchacha de ojos relucientes, dime tú, si conoces el arte de invertir, cuál es el número que multiplicado por tres, aumentado en tres cuartos de ese producto, dividido por siete y multiplicado por sí mismo, da por último es número nueve"

¿A qué número hace referencia?

Ejercicio 9.

La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Ejercicio 10.

Para vallar un terreno rectangular de $750\ m^2$ de superficie se han utilizado $110\ m$ de cerca. Calcula las dimensiones del terreno.

Ejercicio 11.

Encuentra dos números cuya suma sea 32 y su producto sea 255.